§ 1. Что такое алгебра?

Что такое алгебра? — Является ли она областью математики, методом или психологической установкой? На такие вопросы, конечно, не может быть дано ни однозначного, ни короткого ответа. Место, занимаемое алгеброй в математике, можно попытаться описать, обратив внимание на процесс, который Герман Вейль назвал трудно произносимым именем «*координатизация*». Человек может ориентироваться во внешнем мире, опираясь исключительно на свои органы чувств, на зрение, осязание, на опыт манипулирования предметами внешнего мира и на возникающую отсюда интуицию. Однако возможен и другой подход: путем *измерения* субъективные ощущения превращаются в объективные знаки — числа, которые способны сохраняться неограниченно долго, передаваться другим лицам, не воспринимавшим тех же ощущений, а главное — с которыми можно оперировать и таким образом получать новую информацию о предметах, бывших объектом измерения. Эти две тенденции и отражаются: одна — в геометрии, другая — в алгебре. При этом алгебра играет приблизительно ту же роль, что и язык или письменность в контакте человека с внешним миром. Обе тенденции тесно связаны — алгебро-геометрический дуализм занимает существенное место в этой книге. Обе обладают сильной эстетической компонентой. При сопоставлении с искусством геометрию можно сравнить с живописью, алгебру — с музыкой.

Древнейшим примером являются *пересчет* (координатизация) и *счет* (оперирование), дающие возможность делать заключения о числе предметов, не перебирая их. Из попыток «измерить» или «выразить числом» различные объекты возникли, вслед за целыми, дробные и отрицательные числа. Стремление выразить числом диагональ квадрата со стороной 1 привело к известному кризису в раннеантичной математике и построению иррациональных чисел.

Измерение задает вещественными числами точки прямой и, гораздо шире, выражает числами многие физические величины. Галилею принадлежит самая крайняя формулировка идеи координатизации в его эпоху: «*Измерить все, что измеримо, и сделать измеримым все, что таковым еще не является*». Успех этой идеи, начиная именно со времени, когда жил Галилей, был блистателен. Создание аналитической геометрии дало возможность задавать точки плоскости парами, а точки пространства — тройками чисел и путем оперирования с числами открывать все новые геометрические факты. Однако успех аналитической геометрии основывается, главным образом, на том, что она «сводит» к числам не только точки, но и кривые, и поверхности, и т. д. Например, кривая на плоскости задается уравнением $F(x, y) = 0$. Если это прямая, то F — многочлен 1-й степени и задается своими тремя коэффициентами: при x, при y и свободным членом. В случае конического сечения мы имеем кривую второго порядка, которая задается своими шестью коэффициентами. Если F — многочлен степени n, то он имеет, как легко видеть, $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ коэффициентов, которыми соответствующая кривая задается так же, как точка — координатами.

Чтобы выразить числом корни уравнения, были введены комплексные числа и тем сделан шаг в совершенно новую область математики, включающую эллиптические функции и римановы поверхности.

Долгое время могло казаться, что путь, намеченный Галилеем, сводится к измерению «всего» при помощи известного, необсуждаемого запаса чисел, и проблема заключается лишь в том, чтобы создавать все более тонкие методы такого измерения — вроде метода координат или новых физических приборов. Правда, иногда тех чисел, которые считались известными (или просто, считались числами), оказывалось недостаточно: тогда возникал «кризис», преодолевавшийся расширением понятия числа, созданием нового вида чисел, которые вскоре опять воспринимались как единственно возможные. Во всяком случае, в каждый данный момент понятие числа, как правило, считалось вполне ясным и развитие шло лишь в направлении его расширения: 1 и 2 (а потом «много») $\Rightarrow$ натуральные числа $\Rightarrow$ целые $\Rightarrow$ рациональные $\Rightarrow$ вещественные $\Rightarrow$ комплексные. Но, например, матрицы представляют собой совершенно самостоятельный мир «числоподобных» объектов, никак не укладывающийся в эту последовательность. Одновременно с ними возникли кватернионы, потом другие «гиперкомплексные системы» (теперь называемые алгебрами). «Бесконечно малые преобразования» привели к дифференциальным операторам, для которых естественной оказалась операция совсем нового типа: «скобка Пуассона». В алгебре возникли конечные поля, в теории чисел — p-адические числа. Постепенно стало очевидным, что попытка найти единое, всеобъемлющее понятие числа абсолютно безнадежна. В такой ситуации прокламированный Галилеем принцип можно было обвинить в нетерпимости. Ведь требование «сделать измеримым *все*, что таковым еще не является», явно дискриминирует то, что упорно не хочет становиться измеримым, вытесняет его из сферы интересов науки, а может быть, и разума (становится «secunda causa» в терминологии Галилея). Даже если полемический термин «все» скромно ограничить объектами физики и математики, то и среди них все больше появлялось таких, которые «измерить» при помощи «обычных» чисел было невозможно.

Принцип координатизации все же можно было сохранить, допустив, что множество «числоподобных объектов», при помощи которых осуществляется координатизация, столь же многообразно, как и мир физических и математических объектов, которые ими координатизируются. Объекты, служащие «координатами», должны удовлетворять лишь некоторым условиям очень общего характера.

Они должны быть индивидуализируемы. Например, в то время как все точки прямой обладают одинаковыми свойствами (прямая однородна) и точку можно фиксировать, лишь указав на нее пальцем, — числа все индивидуальны: 3, $7/2$, $\sqrt{2}$, $\pi, \ldots$ (тот же принцип применяется, когда новорожденным щенкам, не различимым для хозяина, привязывают на шею разноцветные ленточки, чтобы отличить их друг от друга).

Они должны быть достаточно абстрактны, отражать свойства, общие широкому кругу явлений.

Некоторые фундаментальные черты изучаемых ситуаций должны отражаться в *операциях*, которые можно производить над координатизирующими их объектами: сложении, умножении, сравнении по величине, дифференцировании, составлении скобки Пуассона и т. д.

Мы можем теперь сформулировать наш т е з и с подробнее.

◀ Любые объекты, являющиеся предметом математического исследования, — кривые и поверхности, отображения, симметрии, кристаллы, квантово-механические величины и т. д. — *могут быть «координатизированы» или «измерены»*. Однако для такой координатизации «обычных» чисел далеко не достаточно.

Наоборот, сталкиваясь с новым типом объектов, мы вынуждены конструировать (или открывать) и новые типы координатизирующих их «величин». Построение и исследование возникающих таким образом «величин» — этим и характеризуется (конечно, очень приближенно) место алгебры в математике. ▶

С этой точки зрения, развитие любого раздела алгебры состоит из двух этапов. Первый из них — рождение нового типа алгебраических объектов из некоторой проблемы координатизации; второй — их дальнейшая жизнь, т. е. систематическое развитие теории этого класса объектов, иногда тесно связанное, а иногда почти и не связанное с той областью, в связи с которой объекты возникли. В дальнейшем мы попытаемся не упускать из виду оба этапа. Но так как алгебраические трактаты часто посвящены исключительно второму этапу, для сохранения равновесия мы будем несколько больше внимание обращать на первый.

Закончим параграф двумя примерами координатизации, несколько менее стандартными, чем уже рассматривавшиеся нами.

Пример 1. *Словарь квантовой механики*, указывающий математические объекты, которыми «координатизируются» основные физические понятия:

Физическое понятие	Математическое понятие
Состояние физической системы	Прямая φ в бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве
Скалярная физическая величина	Самосопряженный оператор
Одновременно измеримые величины	Коммутирующие операторы
Величина, имеющая точное значение λ в состоянии φ	Оператор, для которого φ — собственный вектор с собственным значением λ
Множество значений величины, которое можно получить путем измерения	Спектр оператора
Вероятность перехода из состояния φ в состояние ψ	$\lvert(\varphi, \psi)\rvert$, где $\lvert\varphi\rvert = \lvert\psi\rvert = 1$

Пример 2. *Конечные интерпретации системы аксиом соединения и параллельности.* Начнем с небольшого отступления. При аксиомати-

ческом построении геометрии (для конкретности будем сейчас говорить только о планиметрии) часто рассматривают не всю совокупность аксиом, а лишь ее часть. Тогда возникает вопрос о возможных реализациях выбранной группы аксиом: существуют ли, кроме «обычной» планиметрии, другие системы объектов, для которых аксиомы этой группы выполняются? Обратим сейчас внимание на очень естественную группу аксиом «соединения и параллельности»:

а) через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая;

б) для каждой прямой и не принадлежащей ей точки существует одна и только одна прямая, проходящая через эту точку и не пересекающая этой прямой (т. е. параллельная ей);

в) существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

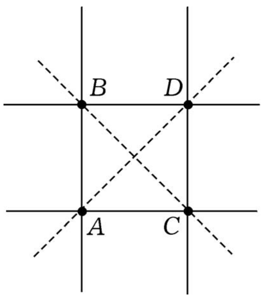

Рис. 1

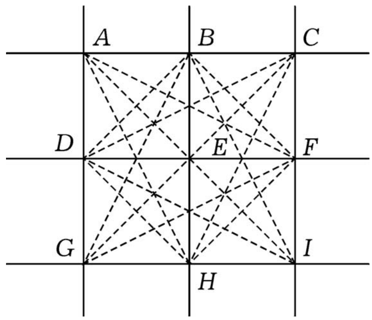

Рис. 2

Оказывается, что эта группа аксиом допускает много реализаций и среди них и такие, которые, в резком противоречии с нашей интуицией, имеют лишь конечное число точек и прямых. Две такие реализации изображены соответственно на рис. 1 и 2. В реализации, изображенной на рис. 1, мы имеем 4 точки: A, B, C, D и 6 прямых: AB, DC; AD, BC; AC, BD. В реализации на рис. 2 имеется 9 точек, A, B, C, D, E, F, G, H, I и 12 прямых: ABC, DEF, GHI; ADG, BEH, CFI; AEI, BFG, DHC; CEG, BDI, AHF. Читатель может легко проверить, что выполняются аксиомы а), б) и в) (в нашем перечне прямых мы разделили точкой с запятой семейства параллельных прямых).

Возвращаясь к нашей основной теме, попытаемся «координатизировать» построенные реализации аксиом а), б) и в). Для первой из них

+	Ч	Н
Ч	Ч	Н
Н	Н	Ч

Рис. 3

×	Ч	Н
Ч	Ч	Ч
Н	Ч	Н

Рис. 4

применим следующую конструкцию: обозначим через Ч и Н свойства целого числа быть четным или нечетным и определим действия сложения и умножения над символами Ч и Н по аналогии с тем, как ведут себя соответствующие свойства при сложении и умножении. Например, так как сумма четного и нечетного числа нечетна, положим $\text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}$ и т. д. Результаты можно выразить в «таблицах сложения и умножения», изображенных на рис. 3 и 4. Пара величин Ч и Н с определенными так действиями будет служить нам для координатизации «геометрии» на рис. 1. Для этого зададим точки координатами (X, Y):

$$A - (\text{Ч}, \text{Ч}),\ B - (\text{Ч}, \text{Н}),\ C - (\text{Н}, \text{Ч}),\ D - (\text{Н}, \text{Н}).$$

Легко проверить, что прямые определяются при этом линейными уравнениями:

$$AB : \text{Н}X = \text{Ч}; \qquad CD : \text{Н}X = \text{Н}; \qquad AD : \text{Н}X + \text{Н}Y = \text{Ч};$$
$$BC : \text{Н}X + \text{Н}Y = \text{Н}; \qquad AC : \text{Н}Y = \text{Ч}; \qquad BD : \text{Н}Y = \text{Н},$$

притом это единственные непротиворечивые линейные уравнения, которые можно образовать при помощи двух величин Ч и Н.

Конструкция для геометрии на рис. 2 аналогична, но несколько сложнее. Разделим целые числа на 3 множества: U — делящиеся на 3, V — при делении на 3 дающие остаток 1 и W — при делении на 3 дающие остаток 2. Действия над символами U, V и W определим аналогично первому примеру: например, так как сумма числа, принадлежащего V, и числа, принадлежащего W, всегда принадлежит U, то положим $V + W = U$, а так как произведение двух чисел, принадлежащих W, всегда принадлежит V, положим $W \cdot W = V$. Читатель легко напишет соответствующие «таблицы сложения и умножения». Теперь легко проверить, что геометрия на рис. 2 координатизируется нашими величинами так:

$$A:(U,U),\ B:(U,V),\ C:(U,W),\ D:(V,U),\ E:(V,V),$$
$$F:(V,W),\ G:(W,U),\ H:(W,V),\ I:(W,W).$$

При этом прямые опять задаются всеми линейными уравнениями, которые можно написать, пользуясь нашими тремя символами. Например, прямая AFH задается уравнением $VX + VY = U$, а прямая DCH — уравнением $VX + WY = V$. Таким образом, для координатизации «конечных геометрий» мы построили «конечные числовые системы». Мы еще вернемся к обсуждению этих конструкций.

Уже эти немногие примеры дают первое представление, какими могут быть объекты, используемые при том или ином варианте «координатизации». Во-первых, их запас должен быть строго очерчен. Иными словами, должно быть указано некоторое множество (или, может быть, несколько множеств), элементами которого могут быть эти объекты. Во-вторых, мы должны иметь возможность с ними оперировать, т. е. должны быть определены *операции*, которые по одному или нескольким элементам множества или множеств дают возможность строить новые элементы. Пока мы больше ничем не ограничиваем природу используемых множеств. Точно так же и операция может быть совершенно произвольным правилом, по которому некоторому набору из k элементов сопоставляется новый элемент. Однако обычно эти операции будут все же сохранять некоторое сходство с действиями над числами. В частности, в ситуациях, о которых мы будем говорить, $k = 1$ или 2. Основными примерами операций, с которыми следует сравнивать все дальнейшие конструкции, будут: сопоставление любому числу a противоположного $-a$, сопоставление любому числу $b \neq 0$ обратного b^{-1} $(k = 1)$, сопоставление двум числам a и b их суммы $a + b$ или их произведения ab $(k = 2)$.

§ 2. Поля

Мы начнем с описания одного типа таких «множеств с операциями», ближе всего соответствующего числовой интуиции.